講義ノート

カオスと脳の動的情報処理

津田一郎　九州工業大学情報工学部

§1 はじめに

近年さまざまな分野で「カオス」が注目されている。しかしながら、カオスに対して「無秩序」、「乱雑」、「デタラメ」といった負のイメージを持ったまま概念の再構築の努力を怠っているひとがいまだに見受けられるのは残念なことである。また、最近は応用分野でカオスへの興味がもたれ始めている。しかしその多くは理論をきちんとふまえた上で工学の問題として扱うといったものではなく、理論も工学もなしにいきなり商業の問題として扱うといったものである。若い院生の人たちがこのような表面的な「カオスばやり」に踊らされることなくカオスの基礎を学びそれぞれ自らの問題として抱え込んでいってほしいと願う。私の講義はカオスに基礎をおいた脳の情報理論についてである。

「カオス」的運動の存在は、19世紀末にフランスの数学者アンリ・ポアンカレ（ポアンカレの研究分野は非常に広く、今日でいう理論物理学、天体物理学、自然哲学も含まれている。20世紀前半までは理論物理学者も数学者と呼ばれていた。）によって最初に非常に具体的な形で予見された。1963年になってアメリカの気象学者エドワード・ローレンツが大気循環の方程式の中に「カオス」運動を発見した。同じ頃、それとは独立にアメリカの数学者スティーブ・スメールが微分可能力学系の体系を確立し、その中で「カオス」運動の本質を見抜いていた。その後70年代に入って、フランスの数理物理学者ルエルとオランダの数学者ターケンスによって流体の乱流化の機構に新たな概念がつけ加えられた。ストレンジアトラクターという概念である。

その後の実験によってストレンジアトラクターは流体の初期乱流過程において「カオス」運動として具現化されることが示された。また、アメリカの数学者リーとヨークが一次元離散力学系の「カオス」の条件を見いだし、ここで初

めて「カオス」という用語が使用され、それ以後決定論的方程式が生み出す複雑な振る舞いで予測不可能なものをカオスと呼ぶようになった。従って、熱雑音のような非決定的な要因によって引き起こされる予測不能な運動形態はここでのカオス運動と区別すべきものである。しかし問題は簡単ではなく、熱雑音の起源を探ればそこには多数の分子の衝突過程があり個々の分子衝突においても決定論的カオスと同種の不安定性が潜んでいることがわかっている。

日本やロシアにおいても非常に早くから（すでに60年代から）、物理学、数学、地球科学、電気工学において、カオスの研究は行われていたことは強調しておきたい。ジャーナリストではなく、深い見識と広範な知識、それに恐らく十分な語学力をもった科学史家が公平な目で世界中の科学者の業績に目を配り、カオス研究の歴史を書き残すであろうことが実際期待されている。

§2　カオスとは何か

カオスとは決定論的方程式が生み出す非決定論的運動形態である。ここで決定論的方程式とは、雑音のような不確定要素をいっさい含まず全ての変数が確定的である方程式のことである。非決定論的運動形態とは、有限精度の観測ではシステムの未来の挙動をまったく予測することができなくなる時間が存在するような運動のことである。「決定論的方程式」は「決定論的ルール」あるいは「簡単なアルゴリズム」と読み替えてもかまわない。このような逆説的な現象がおこるためには、運動方程式あるいはアルゴリズムが非線形であることが必要である。このことを簡単な例で示してみよう。

餅つきを考える。杵で餅をつくことにより、餅は鉛直方向に縮み水平方向に伸びる。相方が伸びた部分を折り曲げ餅の上に重ねる（実際は、相方がさらに伸ばすのだが本質には関わりない）。この曲げる動作が非線形効果を生む。重ねる動作はアルゴリズムに再帰性を与える。引き伸ばしと折り畳みのふたつの動作の繰り返しで均質な良い餅ができあがる。このようすを図1に模式的に示した。図では餅の二次元断面が描かれており、三次元目の方向は一様と仮定している。

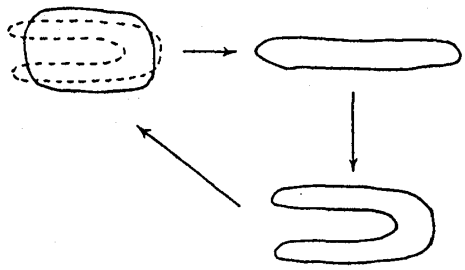


図 1

ここで次のような実験をしてみよう。餅の上のある局所的な部分に紅しょうがの粉をのせる。上のふたつの動作を繰り返すと紅しょうがの粉はどうなるだろうか。図2に示すように、引き伸ばし、折り畳みによって紅しょうがは餅のさまざまな場所にいきわたり、ついには餅全体がピンク色に染めあがる。このような状態になるまでわずか十数ステップの操作である。このとき、紅しょうがの粉の一粒にマークしその動きを追いかけるとどうなるだろうか。図3にマークした粒のx座標の動きを模式的に示した。非常にランダムで予測不能の運動が観測される。決定論的なアルゴリズムによって不規則な運動が実現された。これがカオスの本質である。このような事情でカオスということばのあいまいさを避けるため「決定論的カオス」ということがある。

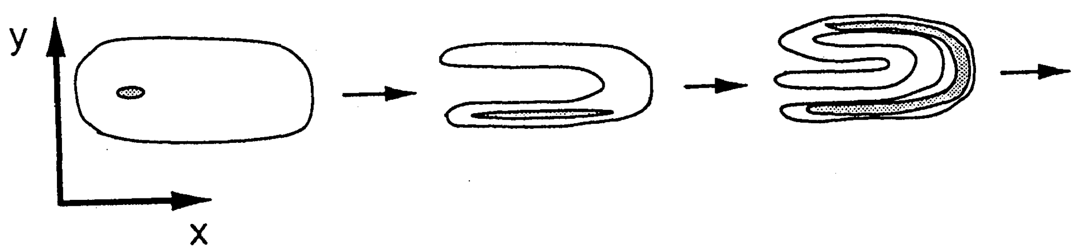


図 2

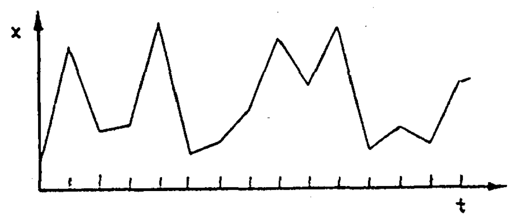


図 3

カオスの特徴は、わずかにずれた二つの初期状態から出発した軌道が時間とともに指数関数的に離れていくということにつきる。上で述べた二つの操作により、二つの軌道は離れたり非常に近づいたりする。しかし決して重なりあうということはない。離れるのは引き伸ばしの操作の結果であり、近づくのは折り畳みの操作の結果である。この実効的な離れ具合を時間の指数関数で測る。この指数をリアプノフ指数という。カオスのリアプノフ指数は正である。世の中にランダム現象は多いが、軌道の分離が高々時間のベキで拡大するもののリアプノフ指数はゼロになることは注意してほしい。回路に入るランダムノイズにもし軌道という概念が適応されるなら、ノイズのリアプノフ指数はゼロになるはずである。

ここでは餅つきを例にとったが、本質的に同じメカニズムの操作はほかにも多くみられる。刀の製造過程、そばやうどんをこねる操作、パイやパンを作る操作等である。このように人類は古くから、カオス生成と本質的に同種の過程を実生活に応用してきたのである。餅やパイはカオスによって材料がよく混ざりあいおいしいものができあがる。刀はカオスによって均質化され折れにくくなる。要はカオスによる混合過程が利用されてきたのである。

そのほかにも日常生活のいろんなところにカオスは観測される。水道の蛇口からポタポタ落ちる水滴の時間間隔がカオス的であることはアメリカのショーたちによって発見され詳しく解析された。この場合カオスは水滴の表面張力と重力のせめぎあいの結果として生成される。従って、蛇口の締め方がカオス的運動を許すかどうかの制御パラメーターになっている。この現象に空間的な相互作用が入ったときのいわゆる時空カオスの例はといをつたって落ちる雨垂れの運動に見ることができる。レーザー光もうまく制御すればカオス的になる。原子のエネルギー準位間の差によって放射されるさまざまな位相をもつ光が協調しあうことにより位相のそろったコヒーレントな光が生成される。これがレーザーである。これがカオス的になることがある。レーザーにかぎらず一般の光を時間遅れのあるフィードバック系に閉じ込めればカオス運動を示すことは池田研介らによって示された。では、蛍光灯からでている白色の光はカオスと同じか違うのか。白色光はいろんな波長の光が混ざりあったものでノイズ的に振る舞う。もし、その運動を一つ一つの光の成分（モード）を使って記述しようとすると、非常に多くの、

理論上は無限個のモードが必要になる。それに比べて、レーザーや光のカオスはたった数個の卓越したモードだけで記述される。ここにカオス運動の大きな特徴がある。微分方程式で記述される系なら高々三変数で、差分方程式で記述される系なら高々一変数でカオス運動は生成される。現在大自由度系のカオスの研究がさかんになっているがこれも基本には小数自由度系のカオスがある。

ここでいくつかの例を示そう。まず、三変数の非線形常微分方程式系の例を二つあげる。式(1)はローレンツ方程式、式(2)はレスラー方程式である。

$$\begin{aligned} dx/dt &= -\sigma x+\sigma y \\ dy/dt &= -y+rx-xz \\ dz/dt &= -bz+xy \end{aligned} \tag{1}$$

ただし、σ, r, bは制御パラメーターである。図4に$\sigma=10$, $r=28$, $b=8/3$のときのローレンツカオスの軌道の集合体、すなわちローレンツアトラクターを描いた。

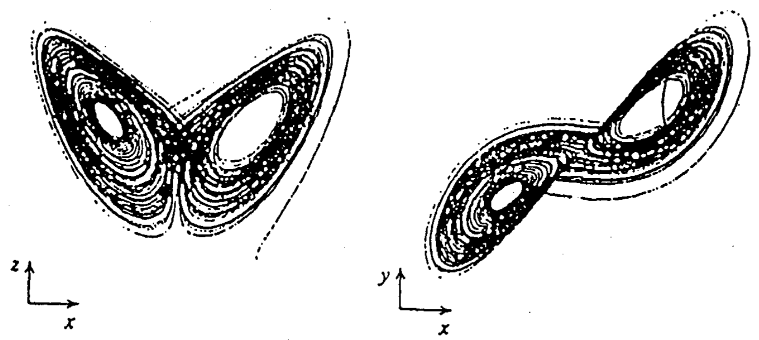


図4　ローレンツ アトラクター

$$\begin{aligned} dx/dt &= -y-z \\ dy/dt &= x+ay \\ dz/dt &= b+xz-\mu z \end{aligned} \tag{2}$$

図5に制御パラメーター $a=b=0.2$, $\mu=4.3$のときのレスラーカオスを示す。このように、カオスは非常に美しい構造をもつ。どれかひとつの変数の時系列は非常に不規則に振る舞うようにみえるにもかかわらずである。実は、レスラーカオスはメビウスの帯と同じトポロジーをもつ。

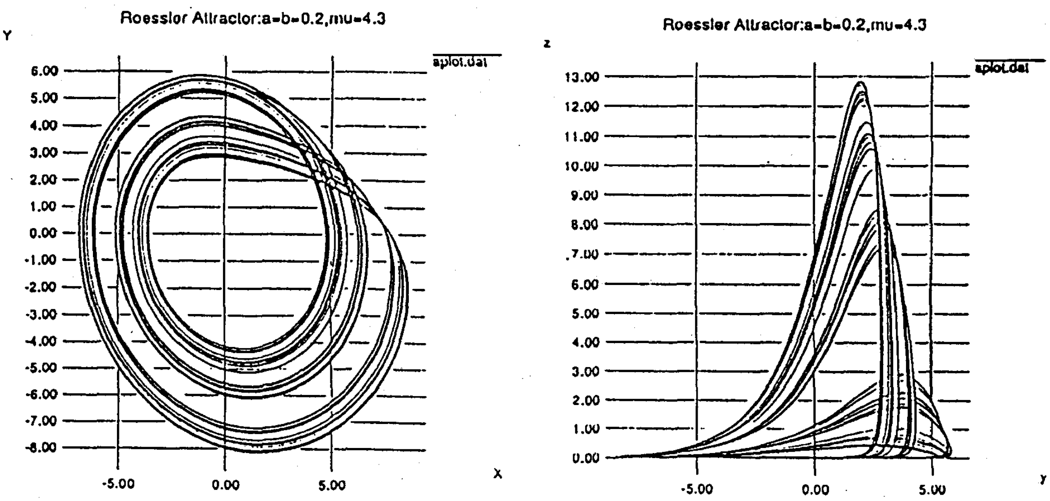


図 5　レスラー アトラクター

次に一変数の非線形差分方程式の最も簡単な例を一つあげる。

$$x(t+1) = ax(t)(1-x(t)) \tag{3}$$

これはロジスティック（差分）方程式の名で知られている系である。tは離散時間を表す。制御パラメーター a を変えていくと方程式(3)の漸近解の様子が変化する。いわゆる分岐現象がおこる。ある a の値でカオスが現れる。系(3)は単なる二次関数だが非常に複雑な振る舞いを示す。レスラーカオスの構造の中にはロジスティックカオスと本質的に等価な構造が埋め込まれている。そしてそれをとりだすことも容易にできるのである。実は式(1)においてパラメーター r を100程度の非常に大きな値にするとローレンツ方程式の解もメビウスの帯と同じトポロジーをもつカオスが現れる。すなわち、ローレンツ方程式にもロジスティックカオスと本質的に同じ構造が内包されているのである。

このように、カオスの発見はランダム運動に対する従来の統計処理を大きく見直すきっかけになった。すなわち、従来の典型的な統計処理では、ランダム運動が与えられるとまず統計分布を見いだし平均値と分散を計算する。このような方法の背景にある一つの信念は、観測者にとって異なるサンプルパスの間には全く因果関係が認められない、というものであると考えられる。カオスの発見によってこの信念は普遍的ではないということが示された。カオスに基づく新しい信念は、異なるサンプルパスの間には明かな因果関係があり、それはサンプル

パスを比較的小数自由度の力学系のなめらかな多様体の中に埋め込むことができる、というものであろう。データを力学系に埋め込み、データのランダムネスのあいだの関係を幾何学的に表現する方法は時系列解析において新しい方法になりつつある。このとき得られるデータに対する幾何学的対象物が図4や図5に示したようなカオスアトラクターであることが期待されるのである。

いまやカオスはさまざまなレベルの自然現象の中に見いだされている。原子核、原子・分子、化学反応、固体、光学系、音響系、流体、宇宙はいうに及ばず、脳神経系や循環器系などの生命現象においてもカオスは観測されており、それぞれ特異な働きをしていることが解明され始めている。

§3　カオス情報プロセッサーの基礎

この章ではカオスを情報のプロセッサーとして扱うための基礎的な事柄について述べる。これは脳のカオスがどういう計算をしているかを推論するための基礎似もなる。

カオス力学系をひとつの計算機械と考えたいので、カオス力学系とチューリングマシーンの対応関係から始めよう。カオス力学系は一般に$dx/dt=f(x;\mu)$、あるいは差分方程式として離散時間 t に対して$x(t+1)=f(x(t);\mu)$の形にかける。ここで $x=(x1,x2,\cdots,xn)$はn個の状態変数（実数で与えられる）を成分とする状態ベクトル、$f=(f1,f2\cdots,fn)$は状態変数の運動を規定する非線形変換、$\mu=(\mu 1,\mu 2,\cdots,\mu k)$は制御パラメーターの組とする。運動方程式を働かせるためには初期条件の組 $x0$を与えなければならない。この初期条件の組はチューリングマシーンの無限長のテープの上に書かれた初期データに対応づけられる。カオス力学系に与える初期値の組を二進展開したとする。このとき得られる0,1の数の並びがチューリングマシンのテープ上に書かれた初期データ、すなわちある特殊な問題に対応する。カオス力学系の非線形関数 f は初期に与えた数をパラメーターμに依存した形で次々に変換していく変換規則である。これはチューリングマシーンの遷移規則に対応する。

チューリングマシーンのなかでもあらゆるチューリングマシーンの動作をシミュレートできる万能チューリングマシーンに興味がある。こういうアルゴリズムで書けるものなら何でも計算できるマシーンのヘッドの動きが非常に複雑

になるであろうことは容易に想像できる。単純な動きしかしないマシーンは万能とはいえない。それはある特殊な問題を解くためだけに設計されたものである。言い替えれば予測のつかないランダムな動きをするマシーンは計算能力が大変高い。カオスは明確な遷移規則のもとであらゆる0,1の数の並びを再現することができる。カオス力学系はこの意味で少なくとも万能チューリングマシーンであるといえる。

上の対応関係は形式的だが、実際カオス力学系をどの様なマシーンと見なせるかという研究が行われている。今度は状態変数を二進展開するのではなく、状態空間に適当なコーディングを行いカオス力学系のダイナミックスを見よう。例えば式(3)のグラフを[0,1]区間でパラメーター $a=4.0$ のとき描けば図6のようになる。区間[0,1/2]を0、[1/2,1]を1と符号化すると図の軌道は0010・・・と符号化される。この数列の左端に小数点をおき、.0010・・・と書く。小数点のすぐ右側が現時刻における状態を表している。すると力学系の進行とともに小数点は一コマずつ右に動いていく。つまりカオス力学系をシフト演算子で表現できる。このことを利用して、カオス力学系をある形式言語を持ったマシーンで観測したとき、元のカオス力学系をどのように再構成できるかという問題を議論することができる。それによりカオス力学系のマシーンとしての程度を分類することができる。このことはクラッチフィールドのεマシーンによって正確に議論がされている。このような研究を通して、カオス力学系がおそらく万能チューリングマシーンを越えた存在として定式化できるかもしれないという期待がある。

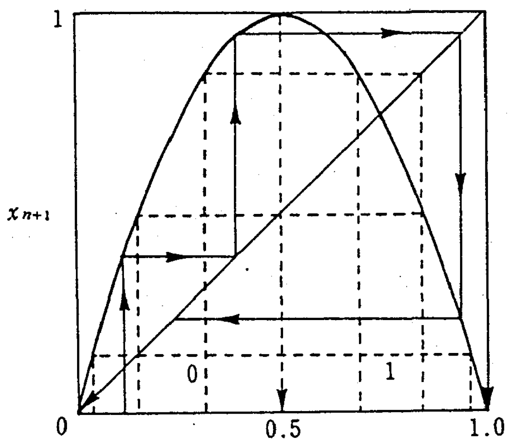


図 6

チューリングマシーンは整数の上の演算を行うことができる。それに対してカオス力学系は実数の上の演算をすることができる。チューリングマシーンでは実数をn桁の整数の並びで近似的にしか表現することはできない。カオス力学系をデジタル計算機でシミュレートするときも事情は同じである。そのときはカオスの陰しか見ていないことになる。実数を一つの実体としてとらえることのできるマシーン上でカオスは初めて正しく計算可能になる。そのことを科学的に保証するためには実数上の計算理論が必要である。最近数学者の間でそのような研究が開始され期待がもたれるが、まだ理論的にも不満足な点が多く残されている。

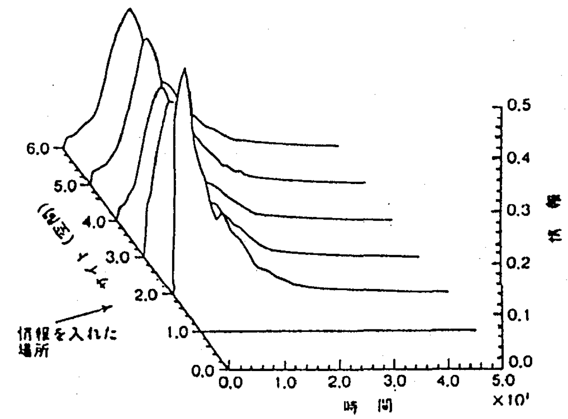
4 カオス情報プロセッサー

さて実際カオス力学系あるいはカオス力学系のネットワークがどの様な計算を行うことができるのか、というのは興味深い疑問である。われわれは数年前からこれに対する基礎的な研究を行ってきた。この章では研究結果の本質的な部分について述べる。カオス軌道が状態空間の各々の場所をおとづれる仕方にかなりの片寄りがあるようなカオスを非一様カオスと呼ぼう。それに対して、あまり目だった片寄りがないものを一様カオスと呼ぶことにする。カオス力学系の初期条件に何らかの情報がコードされたとする。カオスの軌道不安定性によって初期状態の情報は減衰していく。このようすは時間付き相互情報量ではかることができる。計算の仕方は簡単である。状態空間をn等分しn個の離散的な状態を定義する。各状態への滞在確率とある状態から別の状態への時間付き遷移確率が計算できれば時間付き相互情報量を計算できる。

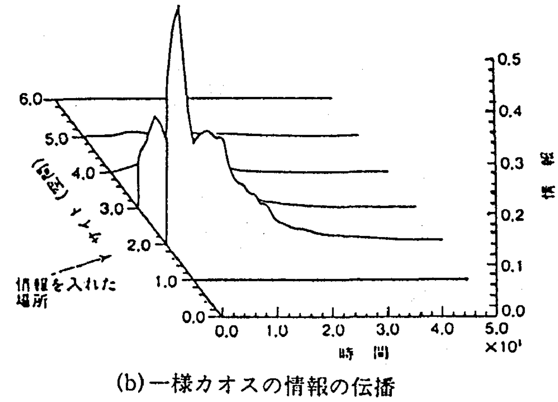
一様カオスではこの量が時間の線形関数で減衰する。これは毎時間同じ’量’だけ初期値の情報が失われることを示す。それに対して非一様カオスでは相互情報量が時間の指数関数あるいはべき関数で減衰する。これは毎時間同じ’割合’で初期値の情報が失われることを示す。前にみたようにカオス力学系を0,1の数字が入っているコンピューターレジスターのように考えることができるので、情報の流れをこのようなレジスター上で表現できる。カオス力学系では情報は平均としてミクロの桁からマクロの桁に流れる。従って、一様カオスでは情報はトコロテン式にミクロからマクロにながれ、非一様カオスでは情報はミクロとマク

ロで混ざりレジスターの各ビットには他のほとんどすべての情報が重層していることになる。このような情報論的な性質の違いは、カオス力学系のネットワークの情報処理能力に大きな違いをもたらす。

カオス力学系をつないだ比較的大きなシステムを考える。今度は情報は初期条件に与えるのではなく、外から注入するとしよう。つまり、何らかの情報系をこのネットワークに結合することで外の情報を系にいれると考える。ここで大変おもしろいことが起こる。一様カオスの結合系では外から注入した情報がうまく伝播せず、空間的にもすぐに減衰してしまう。それに対して、非一様カオスの結合系では外から注入した情報はほとんど減衰しないで空間的に伝播していく。このようすを図7に示した。



(a)非一様カオスの情報の伝播



(b)一様カオスの情報の伝播

図 7

このことを理解するためには、要素力学系がローカルにそれに結合している別の力学系の状態を再構築するという観点が有用である。一様カオスネットでは、要素系の一様カオスに情報の混合の性質がないために、レジスターのどこかのビットの情報が壊されればその力学系の状態をそれに結合されている力学系

が再構築できない。つまり情報を復元することはできない。それに対して非一様ネットでは、個々の要素力学系に情報の混合の性質があるために、レジスターのどれか一つのビットだけが生き残れば、それに結合されている力学系は前の力学系を再構築でき、したがって情報を復元できる。このことがネットワークの中で次々に起こり、入力情報はネットワークの中で減衰することなく、カオスのダイナミックスの中で記憶され続ける。このことはかなり一般に成り立つらしく、カオスを生み出すニューロンモデルを結合した系でも成り立つことが最近しめされている。

§5　脳神経系のカオス

カオスによる計算過程が現実的な問題であることを示すために、以下の節では脳神経系でのカオスの存在と学習に関係していると考えられるカオスについてふれる。

ウサギの嗅球脳波に関するフリーマンの仕事は余りにも有名である。嗅球は臭い情報処理の中継基地のような場所である。それは嗅粘膜上のリセプターにはいった情報が送られてくる場所であり、主に僧帽細胞や顆粒細胞によってネットワークが形成されている。フリーマンはウサギのさまざまな状態における嗅球ネットワークの状態の時間空間パターンを64個の微小電極による同時測定によって明らかにした。特に興味深いのは学習時嗅球脳波のパターン変化である。臭い学習が成立した段階では、嗅球脳波は空間的にはほぼ同期し時間的には周期振動状態（リミットサイクル）に近い弱カオスになった。異なる記憶は位相空間上の異なる弱カオスで表現される。未学習の臭いを学習する過程で記憶状態としての弱カオスを取り囲むような強いカオス状態が現れた。この美しい実験は、少なくともカオスが媒体になり学習過程が進行することを意味しているように思われる。

この実験結果を理論モデルで確認することは意義深いので、最近多くの理論家の研究対象となっている。フリーマン自身も生理学的なモデルをつくって結果の確認を行っている。私も別の目的でつくった半生理的理論モデルで学習実験を行った。私のニューラルネットモデルは学習パターン間のカオス的連接をお

こす。このプロセスで新しいパターンを学習させると、古い記憶パターンをまったく壊さずに新しいパターンの学習が可能なパラメーター領域がみつかった。しかし、今度はカオスを消して同種のことを行うとこのような学習にとって良い領域は消滅した。このことは、カオスが学習の媒体として大きな役割を果たしている可能性を示している。

以上が脳のカオスの情報処理に関する要点である。講義では以下の項目を詳しく扱う。この部分の講義は「ニューロコンピューティング-基礎と応用-」第十三章「神経回路におけるカオス力学系」（津田一郎著）（松岡清利編著、朝倉書店、１９９２年）に準じて行う。尚、脳の情報力学過程のカオス的見方および脳のモデルをどう作るべきかに関しては「カオス的脳観」（津田著、サイエンス社、１９９０年）を参照のこと。

5.1 脳神経系におけるカオスの発見
5.2 ニューロカオスの起源
5.3 情報の時間コード
5.4 記憶の動的連接のモデル
5.5 ニューロカオスの意義

§６　ヒトの循環器系のカオスとその情報論的意味

人の循環器系でもカオスが見つかった。人の心拍リズムがカオス的に変動することはゴールドバーガーやバブロヤンツらによってみつけられた。とくにゴールドバーガーは健康な人の心拍リズムのほうが、心臓病を持っている人のそれよりカオス的であることをみいだし、カオスが生体のダイナミックな維持に重要な役割を果たしているという仮説に到達した。われわれは、心拍リズムではなく心電計で測られる電位そのものを測定しそれがカオスであることをみいだし、カオスアトラクターのトポロジーは健康な人で共通の構造がみられるが心臓病の場合にはその種類に応じてトポロジーが変わることなどをみつけた。さらにわれわれはさまざまな人の指先からえられた脈波がカオス的な変動を示し、心身状態に応じてそれらがダイナミックに変化することを発見した。

脊髄神経支配を受ける抹消血管系は心身状態を敏感に反映するということは、循環器の専門家にとっては常識であるが、われわれの研究結果はそれをカオスダイナミックスの視点、特にカオス情報プロセッサーの視点から詳細に検討できる基盤を与えた。

大事なことは、健康な生体では複雑度の高いカオス状態が出現し、健康度が落ちるとアトラクターの構造が単純になり弱カオスあるいはリミットサイクルになる傾向が顕著に現れるということである。生物学の根本概念の一つである'生体恒常性'（ホメオスタシス）、すなわち、静的な定常状態を保つように生体は制御、維持されている、という考え方を見直す必要がでてきた。ホメオスタシスの代わりにホメオダイナミックス、あるいはわれわれが提唱しているホメオカオスといった考え方が生体の持つ柔軟な動的制御状態を規定する新たな概念として注目されている。

この章の詳しい記述は付録にある。

§7　カオスで何ができるか?

いままで見てきたように、カオス力学系は情報の動的維持や学習の媒体として優れた機能を持つ。また系の状態をダイナミックに維持するのにもカオスが有効に機能しているようである。計算能力の高いものはランダムに振る舞う。カオスはきわめて簡単な機構から生み出されるため、安価で高い計算能力を備えた情報プロセッサーと考えられる。

最近われわれはある特殊なカオス結合系でカオスアトラクターがいくつもコピーされる現象を発見した。おもしろいことに、コピーは方程式で書ける任意の曲線でもよいことがわかった。残念ながらいまのところ反コピーは結合を切ることでしか実現できていないが、実に簡単な外部情報のコピー装置が作れることは応用上もたいへん興味深い。このコピーのメカニズムにカオスの特殊性が使われている。

またこのことに関係して、カオス力学系は従来考えられていた以上に複雑で多様な構造を内包していることもわかってきた。この構造を使えばさまざまな情報の非常に簡単な符号化と復号化が実現できるかも知れない。

カオスはさまざまな秩序構造やルールを内包しているために、データの処理だけではなく処理のためのルールの生成も可能かも知れない。内的な因果関係を維持しつつ外から観測されたとたんその因果関係が見えなくなるような実体としてカオスは存在している。内側に観測装置を持つカオスが脳に存在し機能しているなら、それが従来の人工知能と生物学的ニューラルネットの創造的な機能の側面における決定的な違いをもたらしているのかもしれない。このようにカオスは情報処理、人工知能、動的制御、といった応用分野の発展にも大きな力となるに違いない。